

Correction Feuille Exercice 5

Exercice 11

1. On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. P est une matrice d'ordre 2, on calcule donc son déterminant est $1 \times 2 - 1 \times (-1) = 3$ donc

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} D &= P^{-1}MP \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a donc

$$D = P^{-1}MP \iff PDP^{-1} = M$$

2. On va montrer par récurrence les propositions $\mathcal{P}_n : \{M^n = PD^nP^{-1}\}$.
- **Initialisation** : On a $M^0 = I_2$ et $PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I_2$ donc l'initialisation est vérifié.
 - **Hérédité** : On suppose que la proposition \mathcal{P}_n est vraie pour un certain rang $n \geq 0$. On a alors

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n \times M \\ &= PD^nP^{-1} \times PDP^{-1} \\ &= PD^n \times D \times P^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

Donc la proposition \mathcal{P}_{n+1} est vraie. La suite de proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

- **Conclusion** : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = PD^nP^{-1}$.

Or

$$D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{aligned} M^n &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \times \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -(-2)^n & (-2)^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 + (-2)^n & 1 - (-2)^n \\ 2 - 2 \times (-2)^n & 1 + 2 \times (-2)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

✍ Additionner ou multiplier des matrices

Exercice 12 (Calculs)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$.

1. On calcule

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$$

$$2A - B = 2 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 3 \times 0 & 2 \times 1 + 3 \times 4 \\ 2 \times 2 + 5 \times 0 & 2 \times 2 + 4 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 14 \\ 4 & 24 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 16 \\ 8 & 20 \end{pmatrix}$$

$$3(A - 2B) = 3A - 6B = 3 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -3 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3(A - 2B) + 2(3B + C) - (2A + C) &= 3A - 6B + 6B + 2C - 2A - C \\ &= A + C \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Résoudre l'équation $A - 3X = 2B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned} A - 3X = 2B &\iff -3X = 2B - A \\ &\iff X = \frac{1}{3}A - \frac{2}{3}B \\ &\iff X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 13 (*)

Calculer les produits LC et CL , où $L = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$LC = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (0) \text{ et } CL = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 14 ()**

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned} S &= (2A) \times (3B) - (A + 2B)^2 + (A - B)(A + B) \\ &= 6AB - (A^2 + 2AB + 2BA + 4B^2) + A^2 - BA + AB - B^2 \\ &= 7AB - A^2 - 2AB - 2BA - 4B^2 + A^2 - BA - B^2 \\ &= 5AB - 3BA - 5B^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} T &= (A + B)(2A^2 - 2B) - 2A^2(A + B) + (-A + B)^2 \\ &= 2A^3 - 2AB + 2BA^2 - 2B^2 - 2A^3 - 2A^2B + A^2 - AB - BA + B^2 \\ &= -3AB + 2BA^2 - B^2 - 2A^2B + A^2 - BA \end{aligned}$$

 *Calculer la puissance d'une matrice carrée*

Exercice 15

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. On va montrer par récurrence les propositions $\mathcal{P}_n : \left\{ A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \right\}$.

- **Initialisation** : On a $A^0 = I_2$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2^0 - 1 \\ 0 & 2^0 \end{pmatrix} = I_2$ donc l'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité** : On suppose que la proposition \mathcal{P}_n est vraie pour un certain rang $n \geq 0$. On a alors

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + 0 & 1 + 2 \times (2^n - 1) \\ 0 & 0 + 2 \times 2^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2^{n+1} - 1 \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc la proposition \mathcal{P}_{n+1} est vraie. La suite de proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

- **Conclusion** : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, M^n = PD^nP^{-1}}$.

Exercice 16 (*)

1. On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. P est une matrice d'ordre 2, on calcule donc son déterminant est $1 \times 2 - 1 \times (-1) = 3$ donc

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

et

$$\begin{aligned}
 D &= P^{-1}MP \\
 &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \\
 &= \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}
 \end{aligned}$$

2. On a pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
 M^n &= (PDP^{-1})^n \\
 &= PDP^{-1} \times PDP^{-1} \times \dots \times PDP^{-1} \\
 &= PD^nP^{-1}
 \end{aligned}$$

☞ **Remarque :** On peut démontrer également ce résultat par récurrence

Or

$$D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 M^n &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \times \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -(-2)^n & (-2)^n \end{pmatrix} \\
 &= \boxed{\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 + (-2)^n & 1 - (-2)^n \\ 2 - 2 \times (-2)^n & 1 + 2 \times (-2)^n \end{pmatrix}}
 \end{aligned}$$

Exercice 17 ()**

Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

1. On calcule

$$B - 3I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B - 4I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$(B - 3I_2)(B - 4I_2) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, on a

$$\boxed{(B - 3I_2)(B - 4I_2) = 0.}$$

2. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}(B - 3I_2)(B - 4I_2) = 0 &\Leftrightarrow B^2 - 4B - 3B + 12I_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow B^2 - 7B + 12I_2 = 0\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\boxed{B^2 = 7B - 12I_2.}$$

3. On suppose que pour $n \in \mathbb{N}$, $B^n = a_n B + b_n I_2$. On a notamment $a_0 = 0$, $b_0 = 1$, $a_1 = 1$ et

$$\begin{aligned}B^{n+1} = B^n \times B &= (a_n B + b_n I_2)B \\ &= a_n B^2 + b_n B \\ &= a_n(7B - 12I_2) + b_n B \\ &= (7a_n + b_n)B - 12a_n I_2\end{aligned}$$

En notant également $B^{n+1} = a_{n+1} B + b_{n+1} I_2$, on obtient

$$\boxed{a_{n+1} = 7a_n + b_n, \quad b_{n+1} = -12a_n}$$

4. En utilisant les deux égalités, on a

$$a_{n+2} = 7a_{n+1} + b_{n+1} = 7a_{n+1} - 12a_n$$

La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. On résout l'équation

$$x^2 = 7x - 12 \iff x^2 - 7x + 12 = 0$$

On calcule le discriminant de cette équation $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 12 \times 1 = 1$. Les deux solutions sont donc

$$q_1 = \frac{7-1}{2} \quad \text{et} \quad q_2 = \frac{7+1}{2}$$

$$q_1 = 3 \quad \text{et} \quad q_2 = 4$$

Il existe λ et μ deux réels tels que

$$a_n = \lambda 3^n + \mu 4^n.$$

Afin de déterminer λ et μ , on utilise le fait que $a_0 = \lambda + \mu = 0$ et $a_1 = 3\lambda + 4\mu = 1$.

$$\begin{aligned}\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ 3\lambda + 4\mu = 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} \lambda = -\mu \\ -3\mu + 4\mu = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda = -1 \\ \mu = 1 \end{cases}\end{aligned}$$

On a donc

$$\boxed{a_n = -3^n + 4^n.}$$

On en déduit alors que $b_n = -12a_{n-1} = 12 \times 3^{n-1} - 12 \times 4^{n-1}$ et donc

$$\boxed{b_n = 4 \times 3^n - 3 \times 4^n.}$$

Finalement,

$$\boxed{B^n = (-3^n + 4^n)B + (4 \times 3^n - 3 \times 4^n)I_2.}$$

Inverser une matrice

Exercice 18

1. On calcule le déterminant de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ qui est $1 \times (-2) - 1 \times 2 = -4 \neq 0$. Donc la matrice A est inversible et

$$A^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. On calcule le déterminant de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ qui est $1 \times (-2) - (-1) \times 2 = -2 + 2 = 0$.

La matrice B n'est pas inversible.

Exercice 19 (*)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. On calcule alors

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donc $A^2 - A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Ainsi on a bien

$$A^2 - A - 2I = 0.$$

On a

$$\begin{aligned} A^2 - A - 2I = 0 &\iff A^2 - A = 2I \\ &\iff A^2 - A = 2I \\ &\iff A(A - I) = 2I \\ &\iff A \times \frac{1}{2}(A - I) = I \end{aligned}$$

Donc d'après la définition,

$$\text{la matrice } A \text{ est inversible et } A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 20 (**)

On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On calcule

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
 B^3 - 3B^2 + 2B &= \begin{pmatrix} 4 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 4 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 4 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & 0 \\ 6 & -6 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\
 &= \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}.
 \end{aligned}$$

On va montrer que la matrice B n'est pas inversible à l'aide d'un raisonnement par l'absurde. Supposons que la matrice B soit inversible, il existe alors une matrice B^{-1} et donc

$$B^{-1}(B^3 - 3B^2 + 2B) = B^{-1} \times 0_3 \iff B^2 - 3B + 2I_3 = 0_3$$

Or

$$\begin{aligned}
 B^2 - 3B + 2I_3 &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

ce qui n'est pas la matrice nulle. Il est donc absurde de supposer que B est inversible.

La matrice B n'est pas inversible.

Manipuler la transposée d'une matrice

Exercice 21 (Calculs)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. On calcule

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$${}^tB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$${}^tB {}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

On a bien ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$.

Exercice 22 (*)

1. Il faut revenir ici à la définition. On note les éléments $(a_{i,j})$ les éléments de la matrice A et $(b_{i,j})$ les éléments de la matrice B . Ainsi la matrice $A + B$ est composée des éléments $(a_{i,j} + b_{i,j})$ et donc ${}^t(A + B)$ est composée des éléments $(a_{j,i} + b_{j,i})$.

De la même façon, tA est composée des éléments $(a_{j,i})$ et la matrice tB est composée des éléments $(b_{j,i})$ donc la matrice ${}^tA + {}^tB$ est composée des éléments $(a_{j,i} + b_{j,i})$. Comme deux matrices sont égales si tous leurs coefficients sont égaux, on a

$$\boxed{{}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB.}$$

2. Soient A et B deux matrices symétriques. On a

$$\begin{aligned} {}^t(A + B) &= {}^tA + {}^tB \\ &= A + B \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } A + B \text{ est une matrice symétrique.}}$$

Exercice 23 ()**

On dit que A carrée d'ordre n est antisymétrique si ${}^tA = -A$. On pose

$$A = \frac{1}{2}(A + {}^tA) + \frac{1}{2}(A - {}^tA)$$

Or la matrice $\frac{1}{2}(A + {}^tA)$ est symétrique. En effet,

$${}^t\left(\frac{1}{2}(A + {}^tA)\right) = \frac{1}{2}({}^tA + {}^t({}^tA)) = \frac{1}{2}(A + {}^tA).$$

Et la matrice $\frac{1}{2}(A - {}^tA)$ est antisymétrique. En effet,

$${}^t\left(\frac{1}{2}(A - {}^tA)\right) = \frac{1}{2}({}^tA - {}^t({}^tA)) = \frac{1}{2}({}^tA - A) = -\frac{1}{2}(A - {}^tA)$$

.

$\boxed{\text{Une matrice carrée } A \text{ peut toujours s'écrire comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.}}$